Medalles Fields 2006

Andrei Okounkov

Andrei Okounkov ha treballat, individualment i en col·laboració amb altres matemàtics, en molts problemes de teoria de representacions, combinatòria, geometria i física, aportant solucions completes o fent contribucions molt rellevants sobre una bona quantitat de qüestions. Dos temes recurrents en els seus treballs són l'estudi de les propietats asimptòtiques de problemes combinatòrics i la interacció amb la física estadística i la teoria de cordes. En aquestes notes parlarem d'una porció minsa dels resultats d'Okounkov, triats d'entre els més rellevants guiant-nos per les nostres preferències personals. El lector trobarà una exposició dels resultats d'Okounkov més detallada i escrita de manera molt més competent a la *laudatio* presentada a l'ICM 2006 per Felder [2]. Per acabar, no ens podem estar de recomanar les notes dels diversos cursos impartits per Okounkov sobre els seus propis treballs, moltes a l'arXiv (per exemple, math.CO/0309074, math.CO/0309075, math-ph/0309015, math-ph/0601062), a part, és clar, de la lectura dels seus articles.

Abans de parlar sobre els resultats d'Okounkov, recordarem algunes nocions rellevants de geometria algebraica. Donats dos enters no negatius g i n es denota per $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ l'espai de mòduli de corbes connexes marcades $(C, \mathbf{x})$ estables, de gènere g, definides sobre $\mathbb{C}$, i amb n punts marcats $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Que $(C, \mathbf{x})$ sigui estable vol dir que C és una corba connexa, que totes les seves singularitats són nodals i disjuntes de $\mathbf{x}$, i que el grup d'isomorfismes $f\colon C \to C$ que satisfan $f(x_j) = x_j$ per tot j és finit. Aquesta darrera condició només es pot satisfer si $3g-3+n \geq 0$. El gènere d'una corba nodal C coincideix amb el de la corba que s'obté *allisant* les singularitats de C, substituint un entorn de cada singularitat de C (que és biholomorf a un entorn de $(0,0)$ dins $\{xy = 0\} \subset \mathbb{C}^2$) per la intersecció de $\{xy = \epsilon\}$ amb una bola de radi prou gran en relació amb $\epsilon \neq 0$. L'espai de mòduli $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ té una estructura natural de *stack* de Deligne-Mumford propi o, en termes de geometria diferencial, d'*orbifold* compacte. Atès que des del punt de vista de l'homologia racional els *orbifolds* es comporten com les varietats topològiques, existeix una classe fonamental $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}]$ de grau $6g-6+2n$ a l'homologia racional de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Prenent per cada $(C, \mathbf{x})$ l'espai cotangent de C a x_j s'obté un (*orbi*)fibrat de línia $L_j \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, i donats enters $d_1, \dots, d_n \geq 0$ es defineix

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle = \langle c_1(L_1)^{d_1} \cup \cdots \cup c_1(L_n)^{d_n}, [\overline{\mathcal{M}}_{g,n}] \rangle \in \mathbb{Q},$$

on el gènere g satisfà $3g-3+n = d_1 + \cdots + d_n$ (si el g que resulta no és enter llavors per definició l'expressió anterior és zero). Més en general, si V és una varietat projectiva complexa[1] i $\beta \in H_2(V)$ és una classe d'homologia, es defineix $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(V, \beta)$ com l'espai de mòduli d'aplicacions $\phi\colon (C, \mathbf{x}) \to V$ algebraiques estables (és a dir, tal que $(\phi, C, \mathbf{x})$ té un nombre finit d'automorfismes) que representen la classe β, on $(C, \mathbf{x})$ és una corba marcada connexa, de gènere g i nodal, però no necessàriament estable. En general l'espai $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(V, \beta)$ no és un orbifold, però hom pot definir de manera natural una classe d'homologia racional $[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(V, \beta)]$ que fa el paper de classe fonamental. Per cada j hi ha una aplicació d'avaluació $\mathrm{ev}_j\colon \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(V, \beta) \to V$ que envia $(\phi, C, \mathbf{x})$ a $\phi(x_j)$. Com en el cas de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ es tenen fibrats de línia $L_j \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ que tenen fibra, sobre la classe de $(\phi, C, \mathbf{x})$, canònicament isomorfa al cotangent de C al punt x_j. Donats enters no negatius $d_1, \dots, d_n$ i classes de cohomologia $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in H^*(V)$ es defineix l'invariant de Gromov-Witten (GW) corresponent com:

$$\langle \tau_{d_1}(\alpha_1), \dots, \tau_{d_n}(\alpha_n) \rangle^V_{\beta,g} = \left\langle \prod_j c_j(L_j)^{d_j} \cup \mathrm{ev}_j^* \alpha_j, [\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(V, \beta)] \right\rangle \in \mathbb{Q}.$$

[1] La construcció que expliquem tot seguit (definició dels invariants de Gromov-Witten) també té sentit, fent les modificacions necessàries, quan V és una varietat simplèctica.

Els nombres $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle$ es poden calcular de manera algorísmica, i el mateix passa amb $\langle \tau_{d_1}(\alpha_1), \dots, \tau_{d_n}(\alpha_n) \rangle_{\beta,g}^V$ quan V és una corba algebraica (en canvi, quan V té dimensió ≥ 2 calcular els invariants de GW pot ser molt complicat). Però tant en un cas com en l'altre es planteja el problema d'entendre aquests invariants globalment, de descobrir les estructures que apareixen quan es consideren simultàniament tots els possibles valors dels enters d_j i g (a més de β i les classes de cohomologia α_j en el cas dels invariants de GW) agrupant els invariants en una funció generatriu. Un exemple és la funció següent:

$$F(t_0, t_1, \dots) = \exp\left(\sum_{(k_0, k_1, \dots)} \langle \tau_0^{k_0} \tau_1^{k_1} \dots \rangle \prod \frac{{t_i}^{k^i}}{k_i!} \right).$$

Witten va conjecturar que F és una funció τ de la jerarquia KdV. Més concretament, els següents operadors diferencials contenen F al seu nucli:

$$L_{-1} = \frac{1}{4} T_1^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T_1} + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} (k+2) T_{k+2} \frac{\partial}{\partial T_k},$$

$$L_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T_3} + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} k T_k \frac{\partial}{\partial T_k} + \frac{1}{16},$$

$$L_n = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T_{2n+3}} + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} k T_k \frac{\partial}{\partial T_{2n+k}} + \frac{1}{4} \sum_{i+j=2n} \frac{\partial^2}{\partial T_i \partial T_j}, \qquad n \geq 1,$$

on denotem $T_{2i+1} = t_i (2i+1)^{-1} (2i-1)^{-1} \dots 3^{-1}$ (els operadors L_j són una base de la subàlgebra de l'àlgebra de Virasoro donada pels camps vectorials holomorfs a $\mathbb{C}$). La propietat que $L_k F = 0$ per tot $k \geq -1$ és prou restrictiva per determinar tots els coeficients de F llevat d'un factor multiplicatiu constant. Aquesta conjectura de Witten va ser demostrada per primer cop per Kontsevich (vegeu [3]), i Okounkov en va donar una nova demostració a [6]. Una altra possible funció generatriu és la següent:

$$\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(d_1, \dots, d_n)} \langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle \prod x_i^{d_i}.$$

Considerem la funció definida per tot $x = (x_1 < x_2 < \dots < x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{E}(x) = \exp\left(\frac{1}{12} \sum x_i^3 \right) \int_{\gamma \geq 0} e^{-\int \gamma} W(d\gamma),$$

on $\gamma \colon [x_1, x_n] \to \mathbb{R}$ és contínua, no negativa, lineal a cada segment $[x_i, x_{i+1}]$, satisfà $\gamma(x_1) = \gamma(x_n)$, i la mesura $W(d\gamma)$ és una col·lecció de gaussianes independents en els increments de γ a cada interval $[x_i, x_{i+1}]$. Okounkov dóna a [6] una relació precisa entre $\mathcal{F}$ i $\mathcal{E}$, reinterpretant $\mathcal{F}$ en termes del comportament asimptòtic del nombre de maneres d'obtenir una superfície de gènere fixat identificant les cares de n polígons dos a dos, quan el nombre de cares dels polígons convergeix a ∞. Aquesta idea, interpretar una quantitat definida a partir de la topologia d'un espai de mòduli en termes de l'estudi asimptòtic d'un problema combinatòric, apareix en molts altres treballs d'Okounkov.

Els resultats de [6] es basen en part en l'article d'Okounkov i Pandharipande [7], el primer d'una trilogia dedicada a l'estudi dels invariants de GW d'una corba algebraica V. Usant [7] Okounkov i Pandharipande demostren a [8] que una certa funció generatriu F_V en els invariants de GW satisfà $L_{k,V} F_V = 0$ per tot $k \geq -1$, on els operadors $L_{k,V}$ novament són una base de la subàlgebra de l'àlgebra de Virasoro generada per camps vectorials holomorfs. En aquests treballs s'estableix una relació entre els invariants de GW de V i certs nombres de Hurwitz, i un ingredient crucial és l'estudi del comportament asimptòtic d'aquests nombres de Hurwitz.

Un altre ingredient de [6] són els resultats de [5], on Okounkov demostra una conjectura de Baik-Deift-Johansson que relaciona el comportament asimptòtic de les primeres columnes del diagrama de Young associat a una partició aleatòria de $\{1, \dots, n\}$, quan n tendeix a infinit, amb el dels primers valors propis d'una matriu hermítica aleatòria de mida $n \times n$. La probabilitat que s'associa a cada partició ve donada per la mesura de Plancherel sobre el conjunt de les representacions del grup simètric S_n (que, com és ben sabut, està en bijecció amb el conjunt de particions de n), i per triar la matriu hermítica prenem variables aleatòries normals independents per a cada una de les entrades que no estan sota la diagonal. Per relacionar tots dos problemes, Okounkov construeix un pont que passa per l'estudi de les funcions $\mathcal{F}$ definides en termes de la topologia de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Posteriorment han aparegut dues demostracions més de la conjectura de Baik-Deift-Johansson, una deguda a Borodin, Okounkov i Olshanski, i l'altra, a Johansson. Per a una introducció més detallada a aquests problemes, vegeu l'article de Stanley [10].

Quan V és una varietat de Calabi-Yau de dimensió 3 hom pot definir els invariants de Donaldson-Thomas (DT), que compten subesquemes de dimensió 1 amb característica d'Euler fixada i dins una classe d'homologia donada, en termes de la cohomologia de l'espai de Hilbert corresponent. A diferència dels invariants de GW, els invariants de DT compten corbes sense cap parametrització donada i, a més, són enters, mentre que els invariants de GW, a conseqüència de l'existència de parametritzacions amb automorfismes, són nombres racionals. Maulik, Nekrasov, Okounkov i Pandharipande han conjecturat a [4], inspirats per la teoria de cordes, una relació precisa entre funcions generatrius associades als invariants de GW i els de DT. Una versió local d'aquesta conjectura ha estat demostrada per Okounkov i Pandharipande a [9].

En un altre treball relacionat amb l'espai de mòduli de corbes, Eskin i Okounkov calculen a [1] el volum dels estrats $\mathcal{H}(\mu)$ de l'espai de mòduli de corbes C dotades d'una diferencial holomorfa $\omega \in H^1(T^*C)$ amb ordres d'anulació especificats per $\mu = (\mu_1, \dots)$. La mesura a $\mathcal{H}(\mu)$ es defineix usant la representació de monodromia de ω, i el volum total es calcula via una interpretació en termes del comportament asimptòtic del nombre de revestiments ramificats d'un tor. Aquest resultat troba aplicacions a l'estudi de la dinàmica de billars poligonals genèrics gràcies als treballs d'Eskin i Masur, i del flux geodèsic de Teichmüller a través de la fòrmula de Kontsevich que relaciona els exponents de Lyapunov amb els volums dels estrats $\mathcal{H}(\mu)$. Sobre aquestes qüestions el lector pot consultar el magnífic *survey* de Zorich [11].

Com ja hem dit al principi, Okounkov ha demostrat molts més teoremes dels que aquí hem comentat. A tall d'exemple, i per concloure, esmentem els seus treballs inicials sobre teoria de representacions, alguns en col·laboració amb Kerov i Olshanski, els treballs més recents sobre la relació entre la teoria de Seiberg-Witten i les particions aleatòries en col·laboració amb Nekrasov, i els treballs duts a terme amb Kenyon, Mikhalkin i Sheffield on es relaciona la mecànica estadística dels dímers, en certs límits termodinàmics, amb la geometria algebraica real.

Referències

[1] Eskin, A.; Okounkov, A. «Asymptotics of numbers of branched coverings of a torus and volumes of moduli spaces of holomorphic differentials». *Invent. Math.*, 145 (1), (2001), 59–103.

[2] Felder, G. «The work of Andrei Okounkov». *Proceedings of the ICM, Madrid 2006*, math.GM/0609847.

[3] Looijenga, E. «Intersection theory on Deligne-Mumford compactifications (after Witten and Kontsevich)». Séminaire Bourbaki, vol. 1992/93, *Astérisque*, 216 (1993), exp. núm. 768, 4, 187–212.

[4] Maulik, D.; Nekrasov, N.; Okounkov, A.; Pandharipande, R. «Gromov-Witten theory and Donaldson-Thomas theory, II». [Preprint] math.AG/0406092.

[5] Okounkov, A. «Random matrices and random permutations». *Int. Math. Res. Not.*, 20, (2000), 1043–1095.

[6] Okounkov, A. «Generating functions for intersection numbers on moduli spaces of curves» *Int. Math. Res. Not.*, 18 (2002), 933–957.

[7] Okounkov, A.; Pandharipande, R. «Gromov-Witten theory, Hurwitz theory, and completed cycles» *Ann. of Math.*, 163 (2), (2006), 517–560.

[8] Okounkov, A.; Pandharipande, R. «Virasoro constraints for target curves». *Invent. Math.*, 163 (1), (2006), 47–108.

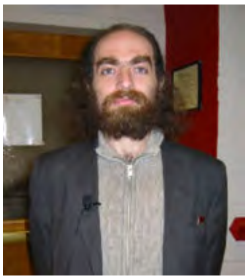
[9] Okounkov, A.; Pandharipande, R. «The local Donaldson-Thomas theory of curves». [Preprint] math.AG/0512573.

[10] Stanley, R. «Increasing and decreasing subsequences and their invariants». *Proceedings of the ICM, Madrid 2006*. http://www-math.mit.edu/~rstan/papers/ids.pdf

[11] Zorich, A. «Flat surfaces». Cartier, P.; Julia, B.; Moussa, P.; Vanhove, P. [eds] *Frontiers in number theory, physics and geometry*. Vol. I: *On random matrices, zeta functions and dynamical systems*, Berlín: Springer-Verlag, 2006, 439–586.

Ignasi Mundet i Riera
UB

Grigori Perelman



Grigori Yakovlevich Perelman va néixer a Leningrad (actualment Sant Petersburg) en una família jueva el 13 de juny de 1966. Va rebre la seva educació en el liceu fisicomatemàtic 239 de Sant Petersburg, una selectiva escola de secundària especialitzada en programes de física i matemàtica molt avançats. El 1982 va competir amb l'equip de la Unió Soviètica a les olimpíades matemàtiques internacionals, i va guanyar una medalla d'or amb una puntuació perfecta. A final de la dècada dels anys vuitanta, obtingué el títol de doctor, amb una tesi sobre les superfícies de sella a l'espai euclidià. Després del seu diploma, treballà en el famós institut de matemàtiques de Steklov, amb A. D. Aleksandrov i Yuri D. Burago. A principis dels anys noranta obtingué molts resultats en geometria riemanniana i en espais d'Alexandrov. Un espai d'Alexandrov és un espai mètric que satisfà certes condicions mètriques sobre els seus triangles, com en una varietat de Riemann de curvatura acotada. Aquests espais apareixen de manera natural quan s'estudien límits o degeneracions de varietats de Riemann. El 1992 va publicar un article fundacional sobre els espais d'Alexandrov amb Burago i Gromov.

El 1992, Perelman fou invitat a passar un semestre a Nova York i un altre a Stony Brook, i el 1993 inicià una beca postdoctoral de dos anys a Berkeley. A finals del primer any d'estada a la Universitat de Califòrnia a Berkeley ja havia escrit la famosa solució de l'anomenada *conjectura de l'ànima*, plantejada el 1972 per Cheeger i Gromoll. Aquests havien demostrat que tota varietat no compacta de curvatura no negativa té una ànima compacta, que en dóna molta informació topològica i mètrica, i havien conjecturat que si la curvatura era estrictament positiva en un punt, aleshores l'ànima seria un sol punt. Perelman va fer una demostració brillant en un article de només tres pàgines. Això fou reconegut amb la invitació a fer una conferència a l'ICM de 1994 a Zuric, alhora que rebé ofertes de treball de Stanford, Princeton, l'Institute for Advanced Study i la Universitat de Tel Aviv. D'aquesta època s'explica una anècdota que s'ha fet famosa. La comissió de Stanford li va demanar cartes de recomanació i un *curriculum vitae*, demanda a la qual ell respongué: si coneixen el meu treball, no necessiten el meu *curriculum vitae*, i si nececessiten el meu *curriculum vitae*, no coneixen el meu treball. L'anècdota pot no ser certa, el que sí que se sap és que va declinar totes les ofertes i el 1995 va tornar a Sant Petersburg, a la seva feina anterior a l'Institut Steklov, amb un sou de menys de cent dòlars mensuals. Sembla que digué que al Estats Units havia estalviat prou diners per viure a Rússia. El seu pare havia emigrat a Israel dos anys abans i se'n va anar a viure amb la seva mare, que s'havia quedat a Sant Petersburg. Als seus col·legues els digué: «M'adono que a Rússia treballo millor». A partir de llavors Perelman donà pocs senyals de vida, llevat del correu electrònic, i sembla que no viatjà fins que anuncià la conjectura de Poincaré.

La conjectura de Poincaré és un problema àmpliament conegut, i ningú no qüestionà que fos un dels set problemes del mil·leni quan la fundació Clay n'elaborà la llista l'any 2000. El que no es preveia l'any 2000 era que, plantejada el 1904, es resolgués amb tres articles penjats a Internet per Perelman durant els anys 2002 i 2003. De fet, Perelman no només resolgué la conjectura de Poincaré, sinó també la conjectura de geometrització, enunciada per Thurston a finals dels anys setanta. Cal dir que fins als treballs de Thurston els especialistes estaven dividits entre els que creien que la conjectura de Poincaré era certa i els que creien que era falsa, i la composició dels grups podia variar cada dia! Els treballs de Thurston que donaven suport a la seva conjectura van fer inclinar la balança cap als que creien que era certa. La conjectura de Thurston afirma que tota varietat es divideix de manera canònica en trossos geomètrics o uniformes, que tenen una mètrica amb propietats especials, anomenada *homogènia*. Aquesta conjectura no només generalitzava la de Poincaré, sinó que introduïa la geometria riemanniana, que finalment ha portat a la resolució.

El següent pas significatiu el feu Hamilton quan va introduir el flux de Ricci. Es tracta d'un flux sobre l'espai de les mètriques riemannianes d'una varietat, que s'ha de pensar com l'anàleg del flux de la calor. Tots sabem que el flux de la calor reparteix la temperatura de manera (asimptòticament) uniforme; anàlogament el flux de Ricci tendeix a repartir la mètrica de manera uniforme en la varietat. Per a superfícies, el mètode de Hamilton funciona bé i redemostra la seva uniformització: donada una mètrica en una superfície compacta, el flux evoluciona en la seva classe conforme cap a una mètrica de curvatura constant. En dimensió tres, però, les coses no són tan fàcils, i el flux dóna lloc a singularitats, llocs on la curvatura tendeix a infinit, explota, en temps finit. Hamilton desenvolupà tot un programa amb aquest flux i obtingué resultats molt importants, però no podia tractar completament les singularitats. Va ser Perelman, treballant en solitari, que va resoldre l'estudi de les singularitats utilitzant un punt de vista molt més riemannià. Un cop resolta la qüestió de les singularitats, en lloc de fer-ho públic Perelman es va dedicar a completar la demostració de la geometrització.

El poc nivell de detall de les demostracions de Perelman ha estat una font important de polèmica. Cal dir que en menys de setanta pàgines Perelman dóna la demostració de la conjectura de geometrització, que inclou la de Poincaré, i que després se n'han elaborat textos detallats, amb extensions d'entre dues-centes i quatre-centes pàgines. Alguns matemàtics pretenen que els treballs de Perelman no es podien considerar suficients per atribuir-li el mèrit de la demostració. La veritat és que la lectura demana un esforç molt gran per completar detalls, però que gairebé sempre s'han de seguir els passos i arguments que suggereix Perelman, que va ometre molts detalls a propòsit.

Els treballs previs de Perelman sobre la conjectura de l'ànima i els espais d'Alexandrov són molt reconeguts, a més d'estar escrits de manera extremadament concisa. Gràcies a aquesta reputació es va donar la importància merescuda als *preprints* de Perelman, i diversos matemàtics es van llençar a treballar en la seva comprensió. En destaquen les notes de B. Kleiner i J. Lott, el llibre de J. Morgan i G. Tian i l'article de H.-D. Cao i X.-P. Zhu. Aquest darrer va saltar als mitjans de comunicació el juny de 2006 per una roda de premsa de S. T. Yau. Cal aclarir que el treball de Cao i Zhu és molt meritori i amb un esperit molt semblant als altres esmentats; és original sobretot en aspectes més analítics, però reprodueix literalment dels altres grups algun fragment més geomètric i topològic. Probablement no van poder evitar veure's involucrats en la campanya de promoció de les matemàtiques a la Xina. Cal recordar que Yau és un matemàtic d'un nivell excepcional, que obtingué la Medalla Fields de manera molt merescuda, però que alhora és molt combatiu políticament, i que promociona molt els punts positius de Cao i Zhu, però no els de Morgan i Tian i Kleiner i Lott.

Tothom sap que Perelman va refusar la medalla Fields. De fet, l'allunyament de la comunitat científica ja havia començat feia uns anys quan va refusar un premi de la societat matemàtica europea, i sembla molt poc probable que mai es torni a integrar en la comunitat científica. En tot cas, els seus treballs han estat comprovats suficientment perquè s'accepti la demostració de la conjectura de Poincaré. D'aquí poc probablement també s'acceptarà plenament la de geometrització. De fet, és en això que tornaré a treballar quan acabi de redactar aquesta nota i l'envii a l'Enric, l'editor de la *SCM/Notícies*, que ja fa molts dies que me la va demanar...

Joan Porti
UAB

Terence Tao

Ja feia temps que el nom de Terence Tao figurava en totes les apostes sobre possibles candidats a la Medalla Fields a l'ICM de Madrid. En la menció del premi es llegeix:

> Per les seves contribucions a les equacions en derivades parcials, a la combinatòria, a l'anàlisi harmònica i a la teoria additiva de nombres.

D'origen xinès i nascut a Adelaida, Austràlia, el 17 de juliol de 1975, Tao va mostrar una habilitat precoç per les matemàtiques que el va dur als vuit anys a participar en un programa especial de la Universitat John Hopkins a Baltimore per a joves excepcionalment dotats. Va ser el participant més jove a les edicions de 1986, 1987 i 1988 de l'Olímpiada Internacional de Matemàtiques, i va obtenir una medalla d'or als tretze anys. Als quinze, va publicar el seu primer llibre de matemàtiques, *Solving mathematical problems, a personal perspective* (ara justament reeditat), als vint-i-un ja havia obtingut el seu doctorat a Princeton, i als vint-i-quatre, una posició de *full professor* a la Universitat de Califòrnia a Los Angeles. La seva brillant carrera no s'atura i guanya tota mena de premis i reconeixements (el Salem Prize el 2000, el Bocher Prize el 2002, el Clay Research Award el 2003, el Levi L. Conant Prize el 2005, el SASTRA Ramanujan Prize el 2006, entre d'altres) fins a obtenir la Medalla Fields aquest estiu.

Aquesta és només una breu descripció de l'expressió pública de qui ha estat batejat com el *Mozart de les matemàtiques*. I és que una de les seves qualitats més reconegudes és la de fer simple el que es donava per intrínsecament complex. Tal com es reflecteix en la menció de la Medalla Fields, Terry (com és habitualment conegut) és admirat per especialistes d'àrees matemàtiques ben llunyanes i que s'han anat distanciant històricament. En la més pura tradició de les grans figures de l'història de les matemàtiques, Terry assegura que

> [. . .] tendeixo a veure les matemàtiques com un tot, i em sento particularment feliç quan tinc l'oportunitat de treballar en un projecte que involucra diverses àrees alhora.

Les contribucions matemàtiques de Terry, gairebé sempre en col·laboració amb altres investigadors i sempre originals i sorprenents, cobreixen un espectre amplíssim. En la seva conferència a l'ICM a Madrid en va triar una de les probablement més populars: l'existència de progressions aritmètiques arbitràriament llargues de nombres primers, un resultat obtingut amb Ben Green, una altra de les promeses més sòlides entre els joves matemàtics. El cèlebre teorema de Szémeredi, del 1975, estableix que qualsevol conjunt d'enters amb *densitat positiva* (asimptòticament conté una fracció positiva de tots els nombres) conté progressions aritmètiques arbitràriament llargues. Els nombres primers no satisfan aquesta condició de densitat. Per adaptar el resultat de Szémeredi als nombres primers, Tao va exposar en la seva conferència un principi filosòfic que, segons ell, l'ha guiat en molts dels seus treballs: cada problema matemàtic sol contenir una part estructurada i una part aleatòria que s'han de separar i tractar de manera diferenciada. Podreu seguir l'aplicació d'aquest principi en l'article de Martin Klazar publicat en un número recent del *Butlletí* de la SCM, sobre aquest resultat.

Una altra de les contribucions celebrades de Terry tracta les equacions no lineals de Schroedinger, equacions en derivades parcials que descriuen, entre d'altres, el fenomen de la propagació de la llum en els cables de fibra òptica. En col·laboració amb quatre matemàtics més, Colliander, Keel, Staffilani i Takaoka, l'anomenat *I-team*, ha donat resultats d'existència de solucions per a una d'aquestes equacions de Schroedinger, el coeficient no lineal de les quals descriu l'autointeracció de la llum en un medi com ara la fibra òptica (d'on ve el nom de *I-team*).

En relació amb l'anàlisi harmònica, una de les contribucions més apreciades de Terry tracta el problema de Kakeya. Imagineu que voleu donar una volta de 180o a una agulla en el pla. Intuïtivament la regió del pla resseguida pel moviment és un cercle. El resultat sorprenent és que aquest moviment es pot fer en un regió d'àrea més petita que la d'un cercle, és més, en una regió d'àrea *arbitràriament* petita. El problema està ben entès en el pla, en el sentit que es coneix la dimensió fractal de l'àrea necessària (una mesura més precisa que l'àrea habitual) que és dos. El problema estava, però, completament obert en dimensions més grans que dos. Les contribucions de Terry en el cas n-dimensional del problema de Kakeya han fet veure les seves implicacions en nombrosos camps de l'anàlisi de Fourier o en l'estudi d'ones no lineals.

No s'acaba aquí la relació de contribucions fonamentals de Tao. En lloc de seguir llegint podeu consultar directament la seva sorprenent pàgina personal. Terry és un escriptor extremament prolífic. Quan li interessa un problema tendeix a donar la seva pròpia versió dels resultats més importants, i els posa a disposició del públic mitjançant la seva pàgina web. També hi posa el seu diari matemàtic personal ple de comentaris suggeridors. Per exemple, el 29 d'octubre de 2006 diu que acaba de revisar la seva versió sobre la prova de Perelman de la conjectura de Poincaré. A la seva pàgina podeu trobar també el capítol del llibre *Additive combinatorics* titulat «Santaló's inequality» entre els quatre capítols que finalment no han aparegut a la versió impresa.

Malgrat tot aquest poder intel·lectual, Terry és una persona senzilla, afable i de tracte normal. Fins fa poc mantenia a la seva pàgina web una extensa col·lecció de fotografies i comentaris filmogràfics de les seves actrius preferides del cinema que, potser a causa a la seva creixent popularitat personal, ha decidit eliminar.

Seguramentse seguirà sentint parlar del personatge i de la seva obra en les properes dècades, segles i potser mil·lennis.

Oriol Serra
UPC

Wendelin Werner

Laudatio escrita i pronunciada per Charles M. Newman (Courant Institute of Mathematical Sciences, Universitat de Nova York, Nova York) a l'ICM06, i publicada a *Prooceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid 2006*, 1, European Mathematical Society Publishing House (ISBN: 978-3-03719-022-7). Traduïda al català per la redacció.

1. Introducció

Per a mi és un gran plaer el poder escriure aquest report sobre alguns dels resultats de recerca de Wendelin Werner que l'han dut a guanyar la Medalla Fields al Congrés Internacional dels Matemàtics de 2006. Hi ha diversos aspectes del treball de Werner que em satisfan especialment. Un d'ells és que es va formar com a probabilista, i es va doctorar el 1993 sota la direcció de Jean-François Le Gall a París, amb una tesi sobre el moviment brownià al pla que, com veurem, té una gran influència en el seu treball posterior. Fins ara la teoria de la probabilitat no havia estat mai representada entre les medalles Fields, i per aquest motiu estic enormement satisfet de ser aquí com a testimoni d'aquest canvi en la història.

Originalment, no vaig formar-me en probabilitats, sinó en física matemàtica. Com veurem, el treball conjunt de Werner i els seus col·laboradors Greg Lawler, Oded Schramm i Stas Smirnov, conté aplicacions de la probabilitat i la teoria d'aplicacions conformes a qüestions fonamentals de la física estadística. Un segon motiu de satisfacció és la meva creença que aquest fet, juntament amb altres treballs recents, és un important pas més en la clara interacció entre matemàtiques i física. És a dir, matemàtics com ara Werner no només troben demostracions rigoroses d'enunciats prèviament existents en la literatura física, sinó que van més enllà i aporten noves maneres conceptuals d'entendre els fenòmens bàsics, en aquest cas, una descripció geomètrica directa de l'estructura aleatòria intrínseca dels sistemes físics en els seus punts crítics (almenys en dues dimensions). La percolació n'és un exemple senzill, però important.

Permeteu-me un comentari més personal com a director del Courant Institute durant els quatre últims anys. Un dels nostres objectius, com ho fou del nostre institut predecessor a Göttingen, és l'eliminació de les distincions artificials entre la ciència matemàtica i les seves aplicacions a altres ciències. Crec que el treball de Wendelin Werner apunta brillantment cap a aquesta direcció.

Encara un tercer motiu de satisfacció és l'estil col·laboratiu de la major part del treball de Werner. Matemàtiques potents i boniques poden venir de diferents estils de treball personal. Però crec que un estil tan interactiu com és el de Werner, Lawler, Schramm i altres col·laboradors, d'una banda, beneficia l'esperit, i de l'altra, porta a un treball més rellevant que la suma de les seves parts. És un bon senyal veure un Medalla Fields guardonat per aquest estil de treball.

2. Camins brownians i exponents d'intersecció

L'àrea de la probabilitat que interactua més fortament amb la física estadística és la que s'ocupa dels processos estocàstics amb estructura espacial no trivial. Aquest camp, que també està relacionat amb finances, teoria de la comunicació i informàtica teòrica, entre altres matèries, té àmplies i interessants aplicacions i utilitza matemàtiques de gran categoria. Deixeu-me esmentar dos dels treballs de Werner del període 1998-2000. No només tenen un valor intrínsec, sinó que també foren precursors de les idees i els avanços posteriors en la comprensió dels sistemes crítics 2-dimensionals amb invariància (natural) conforme. (Hi hagueren, és clar, altres antecedents importants, com ara l'aproximació de Aizenman als *scaling limits* —vegeu, e. g., [1, 2]— i el treball de Kenyon sobre camins amb llaços esborrats i enrajolaments —vegeu, e. g., [13].)

El primer d'aquests dos treballs és un article de 1998 de Bálint, Tóth i Werner, [36]. La motivació va ser la construcció d'una versió contínua de l'anterior reticle de Tóth, la veritable passejada autorepulsora una estructura matemàtica prou bonica (versió ampliada d'una construcció feta per Arratia quasi vint anys abans, no publicada i gairebé oblidada) que unifica i reflecteix els camins brownians unidimensionals que, movent el temps endavant i enrere, omplen tot l'espai-temps bidimensional. En aquesta estructura apareix una corba (aleatòria) recobridora del pla, que és anàloga a la que va motivar Schramm en el seu article del 2000 en què va introduir la SLE, [33]. SLE és la sigla del que va ser originalment anomenat *evolució de Loewner estocàstica*, i que ara es coneix més com a *evolució de Schramm-Loewner*.

El segon treball consisteix en dos articles escrits en col·laboració amb Lawler els anys 1999 i 2000, sobre exponents d'intersecció browniana al pla [25, 27]. En el segon es demostra que tenim el mateix conjunt d'exponents, suposant només certes propietats d'invariància local i conforme. Aquesta va ser una idea fonamental que, combinada amb la introducció de la SLE per a l'anàlisi de fenòmens crítics 2-dimensionals, donà lloc a una remarcable successió de tres articles més dels anys 2001-2002 de Lawler, Schramm i Werner, [17, 18, 20], en els quals aportaven tota una sèrie d'exponents d'intersecció.

Per exemple, siguin $W^1(t), W^2(t), \ldots$ moviments brownians independents al pla començant en diferents punts per a $t = 0$. Llavors, la probabilitat que les corbes aleatòries $W^1([0,t]), \ldots, W^n([0,t])$ siguin disjuntes és $t^{-\zeta_n + o(1)}$ quan $t \to \infty$, per alguna constant ζ_n.

Teorema 2.1. [18] Els exponents d'intersecció ζ_n per $n \geq 2$, són

$$\zeta_n = \frac{4n^2 - 1}{24}. \tag{1}$$

Aquesta fórmula va ser conjecturada anteriorment per Duplantier i Kwon a [12], i deduïda després per Duplantier [11] mitjançant uns càlculs no rigorosos basats en la gravetat quàntica 2-dimensional. Malgrat la simplicitat de la fórmula, abans de la introducció dels mètodes basats en la SLE, la seva obtenció amb tècniques de càlcul estocàstic convencional havia estat impossible.

3. Teoria de la probabilitat conforme

Des de l'any 2001 fins ara hi ha hagut un gran interès en l'aproximació SLE i les seves aplicacions. Per parlar-ne, primer farem una breu introducció a les SLE; [32, 38, 16] en són bones referències generals. Donats un domini de Jordan D en el pla complex, dos punts diferents a i b a la seva vora ∂D, i un paràmetre positiu κ, la SLE (cordal) amb paràmetre κ, denotada SLE$_\kappa$, és un cert camí continu aleatori (una corba, mòdul reparametrizació monotònica) a la clausura $\overline{D}$, començant en a i acabant en b. Quan $\kappa < 4$, SLE$_\kappa$ és (amb probabilitat 1) un camí simple que només toca ∂D en a i b. Loewner, en un treball dels anys vint [28], va estudiar l'evolució de corbes no aleatòries de a a b, en termes d'una «funció conductora» real. Enviant de manera conforme D al semipla superior $\mathbb{H}$ i reparametritzant adequadament, s'obté (per $\kappa \leq 4$) una corba simple $\gamma(t)$ en $\mathbb{H}$ per $t \in (0, \infty)$ i aplicacions conformes g_t de $\mathbb{H} \setminus \gamma([0, t])$ a $\mathbb{H}$ satisfent l'equació d'evolució de Loewner,

$$\partial_t g_t(z) = \frac{2}{g_t(z) - U(t)}, \tag{2}$$

amb funció conductora $U(t) = g_t(\gamma(t))$. SLE$_\kappa$ correspon a l'elecció de $U(t)$ com la funció aleatòria $B(\kappa t)$, on B és el moviment brownià unidimensional estàndard. Quan $\kappa > 4$, es necessita fer algunes modificacions, però la fórmula (2) segueix sent vàlida, encara que per $\kappa \geq 8$ les corbes recobreixen el pla.

Tornem als avanços recents basats en SLE. Molts d'ells han estat motivats per resultats no rigorosos de la literatura sobre fenòmens crítics 2-dimensionals de la física estadística. Els punts crítics dels sistemes físics es donen típicament per a valors molt específics dels paràmetres físics, com els de quan s'acaba la corba de pressió de vapor en un sistema líquid/gas. Els sistemes crítics tenen propietats molt remarcables, ja que s'hi presenten macroscòpicament fluctuacions aleatòries que normalment només són observables a escales microscòpiques. Un fet relacionat és que moltes quantitats quan s'apropen al seu valor crític tenen un comportament exponencial, amb exponents no enters, anomenats *exponents crítics* (així com altres fets macroscòpics tals com els *scaling limits* que comentarem més endavant), els quals es creu que satisfan «universalitat», és a dir models microscòpics diferents en el mateix espai dimensional han de tenir els mateixos exponents en els seus respectius punts crítics. A més, els sistemes crítics 2-dimensionals tenen una remarcable propietat addicional, que està al centre tant del tractament SLE com dels seus antecedents a la literatura física: la invariància conforme a escala macroscòpica.

Com en el cas dels exponents d'intersecció, molts dels resultats bidimensionals basats en la SLE van ser demostracions rigoroses dels valors que ja es coneixien mitjançant arguments no rigorosos, especialment els provinents del que s'anomena en la literatura física com a teoria del camp conforme, iniciada amb els treballs de Polyakov i els seus col·laboradors durant els anys setanta i vuitanta [31, 4, 5] –vegeu també [10, 30, 9]. En canvi, altres resultats són nous. Parlaré d'alguns amb més detall, però, com ja he dit, el que és particularment interessant és que l'aproximació basada en la SLE no és només una rigorització del que ja es coneixia en la literatura física, sinó també una aproximació conceptualment complementària a la de la teoria del camp conforme. Werner en particular ha insistit en la necessitat d'entendre aquesta relació. Això l'ha portat, per exemple, a centrar-se en la «propietat de restricció», com fa en l'article sobre la mesura conformement invariant sobre llaços autodisjunts [39]. Aquest article és un exemple del seu gran interès a estendre l'enfocament SLE original sobre corbes aleatòries en el cas de llaços aleatoris, encara, però, amb propietats d'invariància conforme, tant en el cas específic dels límits escalats de percolació [6, 7] com en els escenaris més generals de les sopes de llaços brownians [26, 37] i dels conjunts de llaços conformes estudiats per Scott Sheffield i Werner.

A continuació presento més exemples dels resultats obtinguts en els darrers sis anys.

4. La frontera browniana

Sigui $W(t)$ un moviment brownià al pla. El complement al pla de la corba $W([0, t])$ és una unió numerable de conjunts oberts, un dels quals és infinit; la frontera d'aquesta component infinita s'anomena la *frontera browniana*. Com a conseqüència de les relacions profundes que el moviment brownià al pla i els seus exponents d'intersecció tenen amb la SLE_6 (vegeu [19, 23]), Lawler, Schramm i Werner obtenen el resultat següent, que demostra una famosa conjectura de Mandelbrot [29]:

Teorema 4.1. [21] La dimensió de Hausdorff de la frontera browniana planar és 4/3.

5. Camins amb llaços esborrats

El teorema següent reflecteix informalment un altre conjunt de resultats que tracten de camins amb llaços esborrats i altres objectes aleatoris en reticles. Excepte en el cas de la percolació, que discutirem més endavant, aquests resultats sobre límits escalats continus, en els quals l'escala del reticle tendeix a zero, no es restringeixen a cap reticle particular.

Teorema 5.1. [24] Sigui D un domini de Jordan al pla; llavors els *scaling limits* dels camins amb llaços borrats aleatoris, l'arbre maximal uniforme aleatori i la corresponent corba densa en D són, respectivament, SLE_2, un arbre continu basat en SLE_2, i la SLE_8 que omple el pla.

Els límits escalats de models de reticles estan entre els resultats més interessants i, sovint, més difícils. Tractar-los bé requereix un gran domini de conceptes i tècniques de tres àrees diferents: geometria conforme (com en les evolucions de Löwner clàssiques amb funció conductora no aleatòria), anàlisi estocàstica (ja que per la SLE la funció conductora és un moviment brownià), i la teoria de la probabilitat per a models de reticles (e. g., camins aleatoris, o percolació, o models d'Ising...). El treball d'en Werner combina aquests tres ingredients amb una eficàcia admirable.

6. Percolació

Abans d'acabar, permeteu-me tractar un exemple més que demostra com poden interactuar les tres àrees esmentades: els *scaling limits* de percolació crítica 2-dimensional. La comunitat física ja coneixia (de manera no rigorosa) els valors dels exponents i, fins i tot, certa informació geomètrica sota la forma de fórmules específiques per a límits escalats de probabilitats de creuament entre trossos de les vores de dominis. Aquestes fórmules les va trobar Cardy [9] seguint la conjectura d'Aizenman, la qual afirmava que havien de ser conformement invariants [15]. Però es tenia poc coneixement de la geometria dels límits escalats d'objectes com ara les vores dels *clústers*.

A [33], Schramm va argumentar que el límit d'una vora, anomenat el *camí d'exploració*, havia de ser SLE_6. Llavors, Smirnov, per al reticle triangular, va demostrar [34] que (A) les probabilitats d'encreuament convergeixen a les fórmules de Cardy conformement invariants, i va esboçar un argument sobre com això podia portar a (B) la convergència de tot el camí d'exploració a SLE_6, justificant a més que s'han de poder estendre aquests resultats a (C) un *scaling limit* complet per a la família de llaços de vores de tots els clústers. Llavors, a [35], Smirnov i Werner mostren alguns exponents de percolació, usant la convergència del camí d'exploració (B), mentre que a [22], Lawler, Schramm i Werner combinen el *scaling limit* complet (C) amb els arguments de percolació per obtenir un altre exponent que presentem més endavant.

La convergència de (B) i (C) es pot demostrar usant una quantitat considerable d'eines de percolació reticular [6, 7, 8], com a resultats de Kesten, Sidoravicius i Zhang [14] i d'Aizenman, Duplantier i Aharony [3]. Aleshores els resultats de Werner i coautors sobre l'exponent de percolació s'apliquen i donen un altre exemple excel·lent de com els tres ingredients mencionats anteriorment interactuen: el teorema següent demostra una conjectura de den Nijs i Nienhuis [10, 30].

Teorema 6.1. [22] En percolació crítica sobre el reticle triangular,

$$\begin{aligned}\text{Prob}[\text{diàmetre del clúster d'origen} \geq R] = \\ R^{-5/48+o(1)}, \;\; R \to \infty.\end{aligned} \tag{3}$$

7. Conclusió

Acabo amb uns comentaris sobre models continus de la teoria de la probabilitat i les seves relacions amb altres àrees de les matemàtiques que es veuen exemplificades en el treball de Wendelin Werner. Tradicionalment, un dels principals enfocaments de la teoria de probabilitats, especialment a França, ha estat cap a objectes continus com són el moviment brownià i el càlcul estocàstic, amb les aplicacions a les equacions diferencials estocàstiques. Els que ens hem format en un context diferent, com ara la mecànica estadística, de vegades veiem els models de reticles com a més «reals» o més «físics». Però això és una visió parcial. Són només els models continus amb propietats especials, com ara la invariància conforme en dues dimensions, els que relacionen la teoria de la probabilitat amb altres àrees desenvolupades de les matemàtiques. Aquestes relacions i interseccions han esdevingut d'importància creixent en els darrers anys, i aquesta tendència seguirà en el futur. Fins i tot per a aquell que estigui interessat en els models de reticle originals, és prou clar que les seves propietats, com ara els exponents crítics o l'universalitat crítica, no poden ser enteses sense una anàlisi profunda dels models continus que apareixen en els límits escalats. Gràcies al treball de Wendelin Werner, els seus col·laboradors i d'altres, hom pot dir que ara tots som «continuistes».

8. Referències

Per motius d'espai hem omès la llarga llista de referencies d'aquest escrit; el lector interessat pot consultar l'article original a *Prooceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid 2006*, vol. 1, European Mathematical Society Publishing House, on les trobarà amb la mateixa numeració.

Premi Nevanlinna 2006: Jon Kleinberg

Al Congrés Internacional dels Matemàtics (ICM) celebrat a Madrid l'agost de 2006, Jon Kleinberg va rebre el Premi Nevanlinna. Aquest premi el va instaurar la International Mathematical Union (IMU) l'any 1982 i es concedeix a cada ICM, al mèrit de les contribucions en aspectes matemàtics de les ciències de la informació.

Els informàtics teòrics que han rebut prèviament el premi són: Robert Tarjan (algorísmia i teoria de grafs), Leslie Valiant (algorísmia i complexitat), Alexandre Razborov (complexitat), Avi Wigderson (complexitat i algorísmia), Peter Shor (computació quàntica) i Madhu Sudan (complexitat i teoria de codis). Una particularitat de tots ells és que treballen als EUA.

Malgrat els seus trenta-cinc anys, Jon Kleinberg té una extensa producció científica, gran part d'ella sense coautors. Com veurem, els seus articles tenen dues característiques: cobreixen un ampli espectre de l'algorísmia, i alguns dels seus treballs teòrics han tingut una aplicació pràctica a molt curt termini. Kleinberg té disponible, a la seva pàgina web, un ampli ventall de la seva producció científica http://www.cs.cornell.edu/home/kleinber.

Evidentment, aquest escrit té una intersecció important amb l'anunci oficial del premi que va aparèixer a la revista *Notices of the AMS* [9].

Jon Kleinberg va fer el doctorat al Departament de Computer Science al MIT, sota la direcció de Michel Goemans, sobre el tema de dissenyar algorismes per problemes del tipus *camins disjunts*. El problema bàsic és el següent: donada una xarxa, trobar els camins disjunts (que no intersectin) entre qualsevol parell de nodes a la xarxa. Es coneix que aquests problemes són NP-hard, la qual cosa implica que sota la hipòtesi plausible que P≠NP, el problema no té solució eficient (que funcioni en temps polinòmic en la grandària de l'entrada) determinista [1]. El que Kleinberg va fer és dissenyar algorismes d'aproximació eficients, és a dir, algorismes que donen una solució *aproximada* a la solució òptima del problema i ho fan en temps polinòmic.

Al mateix temps que feia la seva tesi, Kleinberg va treballar en altres problemes. En particular, sobre el problema de trobar els veïns més propers a l'espai euclidià d-dimensional. Donat un conjunt $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ de punts a $\mathbb{Z}^d$ i un altre punt $q \in \mathbb{Z}^d$, volem trobar el punt $p_i \in P$ més proper a q (en la distància ℓ_2). La solució a aquest problema es pot utilitzar com a tècnica per resoldre problemes en altres camps. Per exemple, donat un conjunt de dades, es pot representar cada dada com un punt a $\mathbb{Z}^d$ (on d es el nombre de components de cada dada); aleshores comparar dades per veure (per exemple) el grau de similaritat és equivalent a